Damascus University
Higher Institute of Earthquake Studies and Researches

Continuum Mechanics- Elasticity and Plasticity

Lec.09

The Displacement Field and Strain Field

مقدمة:

- تحت تأثير القوى الخارجية والتي تتألف من قوى جسمية وقوى سطحية. يعاني الجسم المرن من تشوهات. أي نقطة A بإحداثيات x,y,z تتحرك لموضع جديد x_1,y_1,z_1 مولدة حقل انتقال وهو شعاع. تدعى مركباته الكارتيزية بـ u,v,w . يمكن فرز الإنتقالات للنقاط المختلفة من الوسط المستمر إلى قسمين:

1. حركة جسم صلب (جميع نقاط الجسم تتحرك انسحابياً بالمقدار نفسه وتدور بالمقدار نفسه).
2. تشوه (الحركة النسبية لنقاط الجسم بعضها بالنسبة لبعض).

- يولد الجسم تشوهات نسبية «انفعالات» (وبالتالي إجهادات مترافقة) فقط عندما يكون حقل الإنتقال (displacement field) تابع للموضع, ويختلف باختلاف مواضع الجزيئات.
- يمكن توصيف موضع وانتقال أي نقطة في وسط مستمر اعتباراً لأي نظام إحداثي , وتحديداً النظام الكارتيزي أوالإسطواني .
- موضع وانتقال كل جزيء ضمن الجسم يمكن توصيفه تبعاً لموضعه الإبتدائي أو تبعاً لموضعه الحالي بعد التشوه. وبالتالي هناك توصيفين , توصيف لاغرانجي (أو مادي) , وتوصيف أويلري (أو مكاني).

توصيف تحرك جسم:

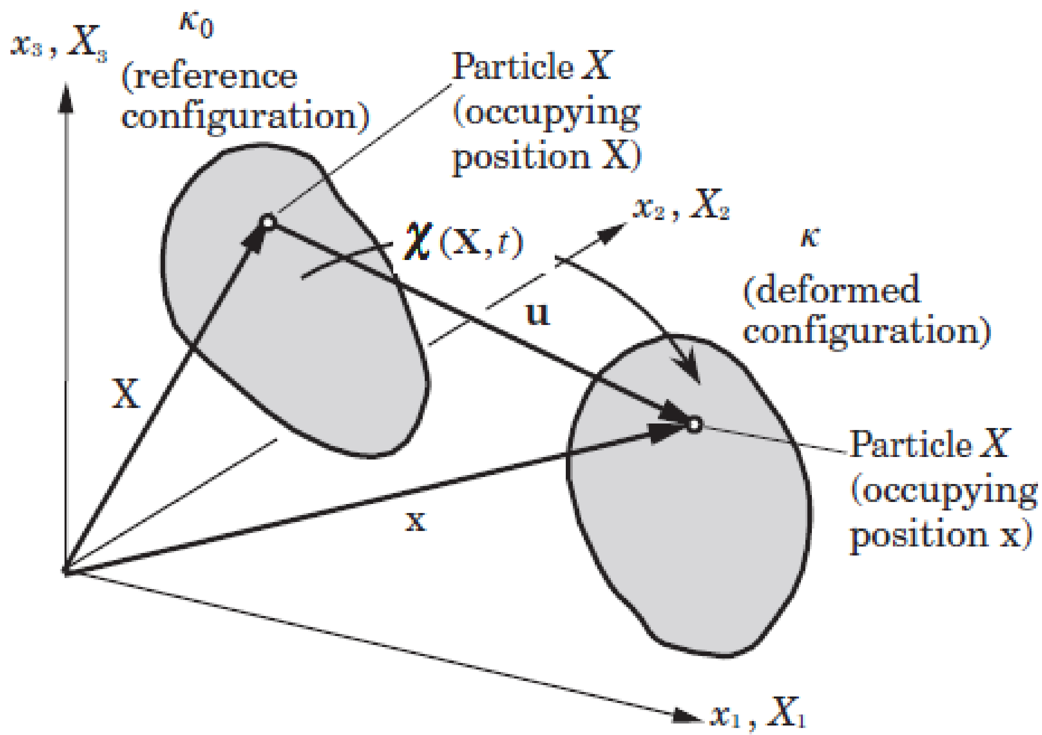
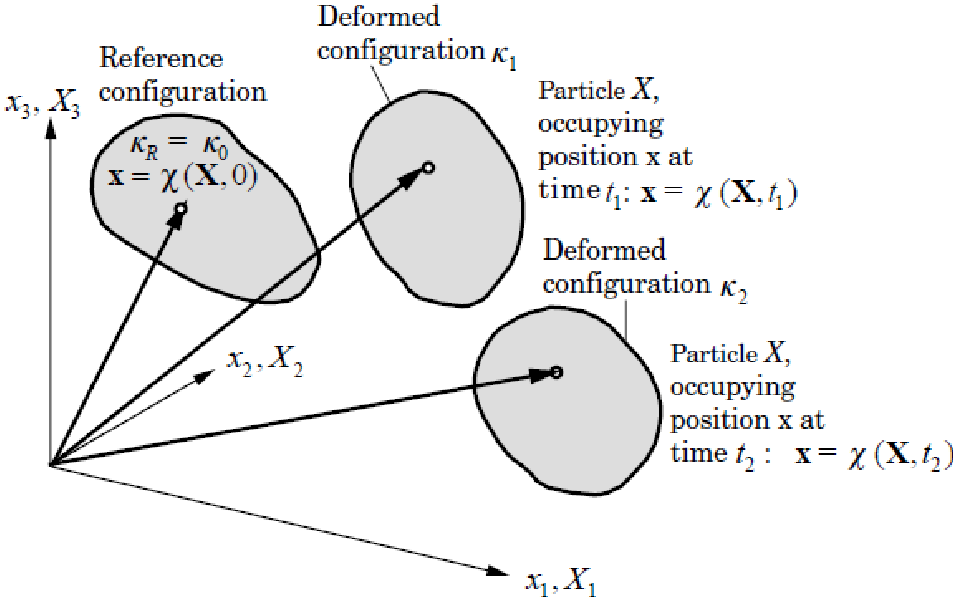


Figure 3.2.1. Reference and deformed configurations of a body.

Lagrangian (Material) Description

- الإحداثيات الحالية: $(\mathbf{x} \in \kappa)$ current coordinates (الجسم بعد بدء التحميل)
- الإحداثيات الإبتدائية: $(\mathbf{X} \in \kappa_0)$ reference coordinates (الجسم قبل التحميل , قبل التشوه)
- تغير أي تابع (متحول) ϕ على جميع نقاط الجسم يتم توصيفه تبعاً لإحداثيات المادة و الزمن.

$$\phi = \phi(\mathbf{X}, t)$$

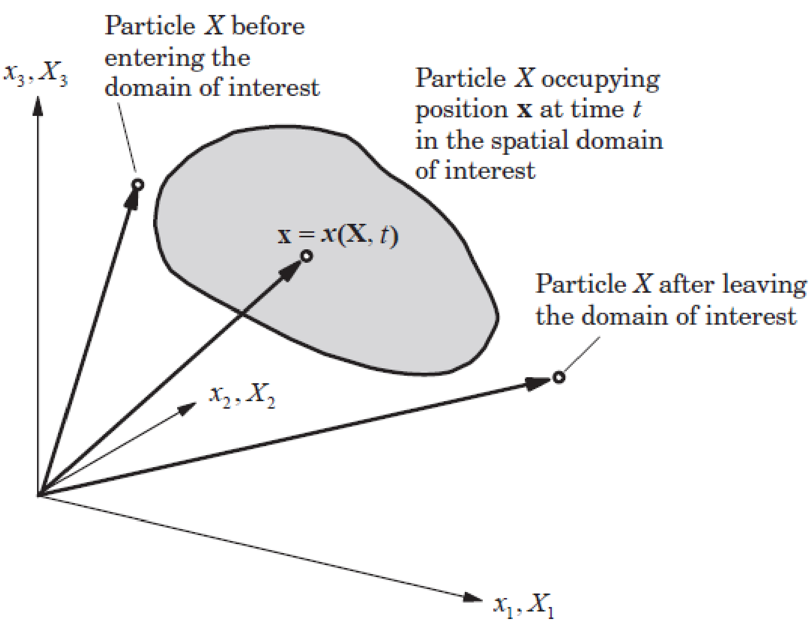


Eularian (Spatial) Description

- الحركة يشار إليها عن طريق التشكيل الحالي الذي يحتله الجسم B .
- تغير أي تابع (متحول) يوصف بالنسبة للموضع الحالي في الفراغ والذي تحتله مادة الجسم B

$$\phi = \phi(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$$

- هنا x هي إحداثيات فراغية وليست إحداثيات نقاط محددة من الجسم.



توصيف حركة جسم

- عندما يكون ϕ معرفاً في التوصيف المادي (لاغرانج) $\phi = \phi(\mathbf{X}, t)$ يصبح مشتقه للزمن هو التفاضل الجزئي بالنسبة للزمن لأن إحداثيات المادة X لا تتغير مع الزمن.

$$\frac{d}{dt}[\phi(\mathbf{X}, t)] = \frac{\partial}{\partial t}[\phi(\mathbf{X}, t)]\Big|_{\mathbf{X}\text{ fixed}} = \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

- عندما يكون ϕ معرفاً في التوصيف المكاني (أويلر) $\phi = \phi(\mathbf{x}, t)$ يصبح مشتقه للزمن يعرف بـ «مشتق المادة» (*Material dericaitve*[1]).

$$\frac{d}{dt}[\phi(\mathbf{x}, t)] = \frac{\partial}{\partial t}[\phi(\mathbf{x}, t)] + \frac{\partial}{\partial x_i}[\phi(\mathbf{x}, t)]\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + v_i\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\phi$$

على سبيل المثال إذا كان a هو تسارع نقطة مادية فيمكن أن يعطى بالعلاقة:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}, \quad \left(a_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)$$

[1] Stokes's notation for material derivative is D/Dt

مفهوم أولي للإنفعال (التشوه النسبي)

- التشوه النسبي (الإنفعال) هو مقياس نسبي للتشوهات يتمثل بتقسيم فرق الانتقالات للجزئيات في الجسم المتشوه على طول مرجعي. وهو التغير في الانتقال النسبي المتعلق باتجاه محدد ضمن الجسم.
- الإنفعال مقدار تنسوري (كما هو الإجهاد) يقسم إلى مركبات ناظمية وقاصة.

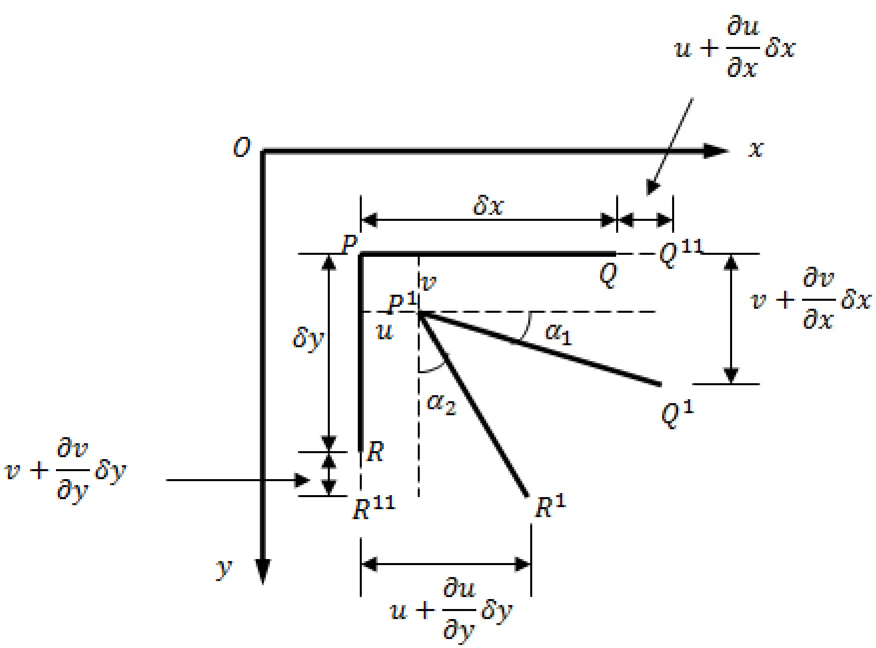
$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \epsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \epsilon_z \end{bmatrix}$$

- الإنفعال الناظمي عائد إلى التغير في طول واحدة الطول الأساسية (قبل التشوه). ويرمز له بالرمز ϵ متبوعاً بلاحقة تبين الإتجاه الذي تم في التشوه.
- الإنفعال القاص هو مقياس لتغير الزاوية بين عنصرين خطيين ذوي أطوال متناهية الصغر كانت الزاوية بينهما قائمة قبل التشوه. ويرمز له بالرمز γ متبوعاً بلاحقتين كل واحدة في اتجاه خط.
- الإنفعال الهندسي (Cauchy or Engineering Strain)

$$\epsilon = \frac{change\ in\ length}{small\ original\ length} = \frac{\delta L}{L}$$

العلاقة بين الإنفعال و الإنتقال
Strain Displacement Relation

- إن حركة وسط مستمر هي تراكيب من الإنتقالات والدورانات والتشوهات.
- من أجل تحليل التشوه نركز على التغير الصغير لعناصر خطية تربط بين نقاط متجاورة في الجسم
- مركبات التشوه سيعبر عنها بدلالة مركبات الإنتقالات.
- هنا نفترض أن جميع مركبات الإنفعال صغيرة بحيث أن المادة محملة لما قبل حد المرونة.
- العنصران PR PQ تشوها إلى P^1R^1 P^1Q^1 بسبب الإجهادات
- ليكن u,v مركبات شعاع الإنتقال للنقطة P(x,y)
- تمدد الجزء PQ الذي طوله δx في الإتجاه x هو:



$$u+\frac{\partial u}{\partial x}\times\delta x-u=\frac{\partial u}{\partial x}\times\delta x$$

- وبالتالي:

$$\epsilon_x=\frac{Change\ in\ length}{Original\ length}=\frac{\frac{\partial u}{\partial x}\times\delta x}{\delta x}=\frac{\partial u}{\partial x}$$

- أيضا للجزء PR في الإتجاه y هو:

$$=v+\frac{\partial v}{\partial y}\times\delta y-v$$

$$\epsilon_y=\frac{\frac{\partial v}{\partial y}\times\delta y}{\delta y}=\frac{\partial v}{\partial y}$$

- الانفعال القاص يعرف بأنه التغير في الزاوية بين عنصرين خطيين في نقطة كانا أساساً متلاقيين في زاوية قائمة عندها , ففي حالة العنصرين PQ PR : $\gamma_{xy} = \alpha_1 + \alpha_2$
- في حالتنا فالتشوهات صغيرة جداً وبالتالي: $\tan\alpha_1 \approx \alpha_1$ and $\tan\alpha_2 \approx \alpha_2$

$$\alpha_1 = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} \times \delta x}{\delta x} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\alpha_2 = \frac{\partial u}{\partial y}$$

ومنه: $\gamma_{xy} = \alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$ وبالتالي مركبات الانفعالات بدلالة الإنتقالات:

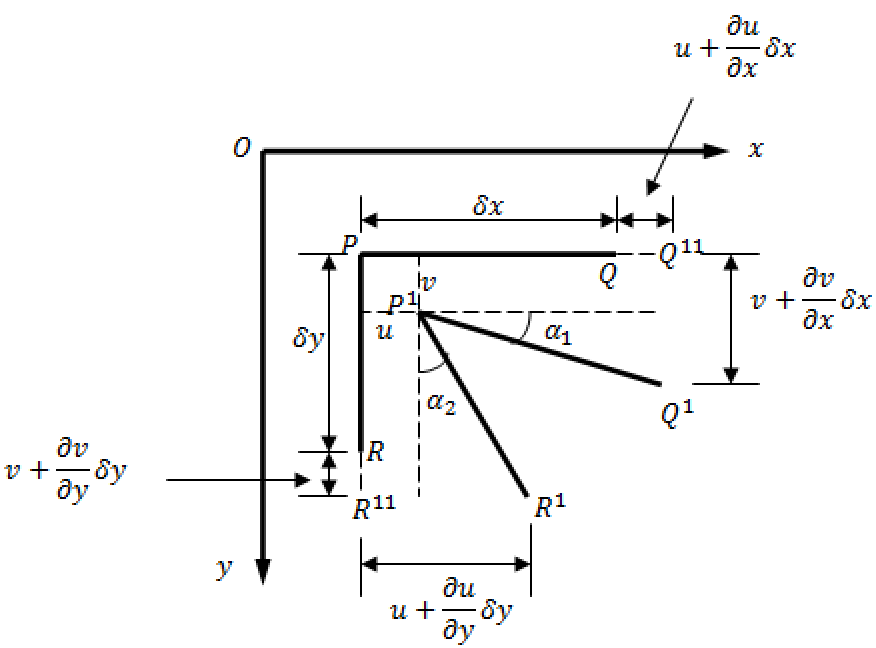
الناظمية: $\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$; $\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$; $\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$

القاصة:

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\& \quad \gamma_{zx} = \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$



الانفعالات القاصة هنا هي الإنفعالات القاصة الهندسية

γ_{xy} Engineering Shear Strain

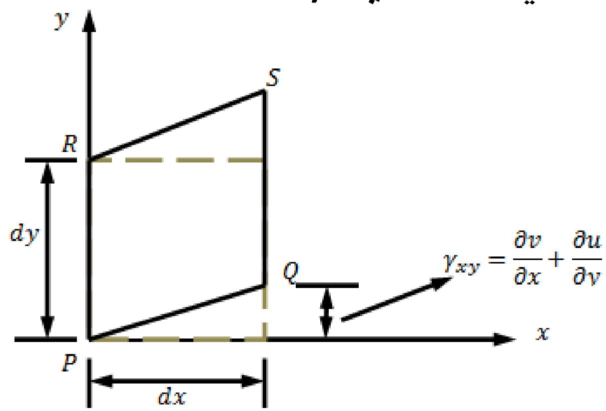
وتساوي قيمتها ضعف الإنفعالات القاصة التنسورية

ϵ_{xy} Tensorial Shear Strain

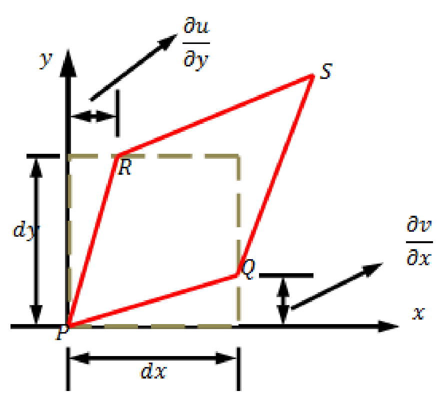
$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \epsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \epsilon_z \end{bmatrix}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \qquad \text{Where, } \gamma_{xy} = \epsilon_{xy} + \epsilon_{yx} = 2\epsilon_{xy}$$

- حيث γ_{xy} هو كامل انفعال القص في المستوي x-y كما هو مبين بالشكل:



- بالمقابل انفعال القص التنسوري ϵ_{xy} هو متوسط انفعال القص على الوجه x بالاتجاه y , وأيضاً على الوجه y بالاتجاه x . كما هو مبين بالشكل:



$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2}\gamma_{xy}$$
$$\epsilon_{yz} = \frac{1}{2}\gamma_{yz}$$
$$\epsilon_{zx} = \frac{1}{2}\gamma_{zx}$$

- تنسور الإنفعالات يمكن تقديمه بصيغة مصفوفية:

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_y & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_x & 1/2\gamma_{xy} & 1/2\gamma_{xz} \\ 1/2\gamma_{yx} & \epsilon_y & 1/2\gamma_{yz} \\ 1/2\gamma_{zx} & 1/2\gamma_{zy} & \epsilon_z \end{bmatrix}$$

- كما يمكن تقديم مصفوفة الإنفعالات بشعاع الإنفعالات مع الأخذ بعين الإعتبار تناظر مركبات انفعالات القص:

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}$$

- علاقات الإنفعالات الإنتقالات يمكن كتابتها باستخدام الصيغة المصفوفية: $\{\boldsymbol{\epsilon}\} = [D]\{\boldsymbol{u}\}$

حيث هنا [D]هي مصفوفة التأثير(operator matrix)

- لاحظ أن: - تنسور الإنفعالات متناظر

- انفعال القص الهندسي هو ما يستخدم عادة في كتب الهندسة ويجب الإنتباه لعدم الخلط بين التنسوري والهندسي.

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}$$

الإنفعال في نقطة
Strain at a Point

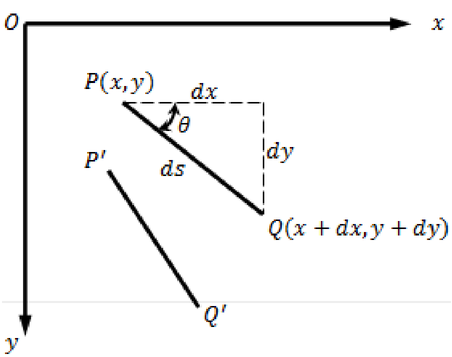
- يحدث التشوه نتيجة الحركة النسبية بين النقط في جسم , فإذا بقي شكل وحجم الجسم بلا تغيير فتدعى الحركة التي يتحركها الجسم عندئذ حركة الجسم الصلب . Rigid Body Motion
- أما إذا تغير شكل أو حجم الجسم فيلقب بأنه انتقل من تشكيل إلى تشكيل آخر. المادة حول كل نقطة ستنتقل وتدور وبالتالي ستتعرض للإنفعال.
- في الحالة العامة لا يكون الإنفعال متجانساً عبر الجسم ولكن يختلف بين نقطة وأخرى. وبالتالي الإنتقالات بين النقط ستختلف.
- استناداً لمبدأ استمرارية المادة فإن مركبات الإنتقالات ستكون توابعاً مستمرة للإحداثيات والأكثر من ذلك مشتقاتها بالنسبة لهذه الإحداثيات هي أيضاً مستمرة.
- لاستخراج مركبات الإنفعال في نقطة , نعتبر عنصرين خطيين صغيرين متعامدين يوازيا الاتجاهات x-y فيكون

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

- من أجل ميلان بزاوية θ عن x وبالتالي الاتجاه الاخر يبقى متعامدا مع الاتجاه المائل الأول , ومن هنا يمكن إيجاد مركبات الإنفعال بشكل عام لأي زاوية θ

مركبات الإنفعال في نقطة ما بالنسبة لأي إتجاه

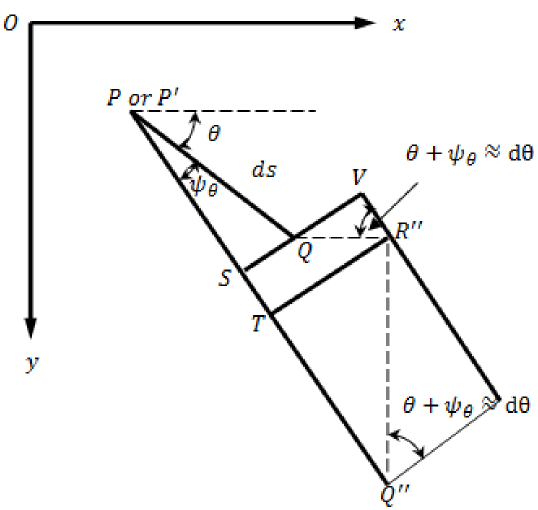
- نستنتج الآن العلاقات من أجل المركبات الناظمية و المماسية للإنفعال في نقطة ما حيث مركبات الإنفعال على طول محورين متعامدين معطية ولتكن $\epsilon_x, \epsilon_y \;\&\; \gamma_{xy}$ هي المركبات المعلومة للانفعال في نقطة ما P .



- لنعتبر طول صغير جداً ds على زاوية θ مع المحورx.
- لتكن مركبات الإنتقال لـP هي u,v فتكون مركبات Q هي:

$$= u + \frac{\partial u}{\partial x} \times dx + \frac{\partial u}{\partial y} \times dy$$

$$= v + \frac{\partial v}{\partial x} \times dx + \frac{\partial v}{\partial y} \times dy$$



- يكون العنصر PQ قد انتقل لموضع جديد P’Q’ .

لنعيد P’ إلى الموضع P وبالتالي التشكيل P’Q’ يصبح PQ”.

وبالتالي مركبات الإنتقال لـQ” بالنسبة لـQ يمكن رؤيتها بسهولة على أنها:

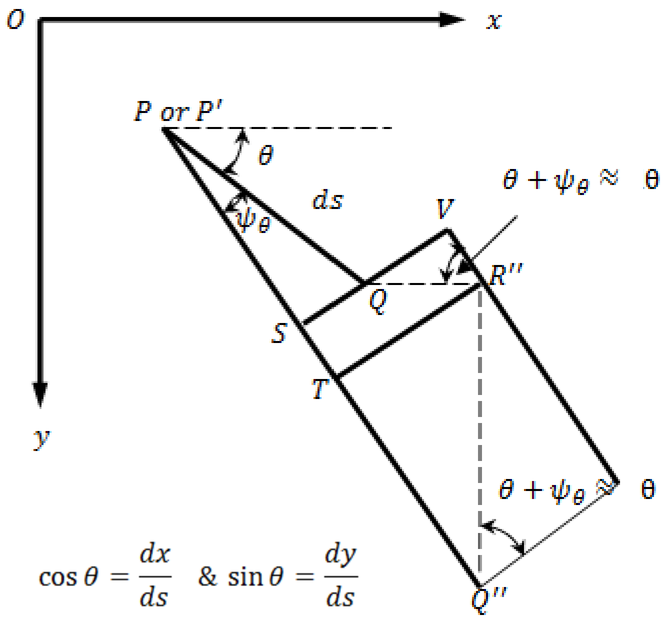
$$QR'' = \frac{\partial u}{\partial x} \times dx + \frac{\partial u}{\partial y} \times dy$$

$$R''Q'' = \frac{\partial v}{\partial x} \times dx + \frac{\partial v}{\partial y} \times dy$$

$$= + \frac{\partial u}{\partial x} \times dx + \frac{\partial u}{\partial y} \times dy$$

$$= + \frac{\partial v}{\partial x} \times dx + \frac{\partial v}{\partial y} \times dy$$

مركبات الإنفعال في نقطة ما بالنسبة لأي إتجاه



$$\cos\theta = \frac{dx}{ds} \quad \& \quad \sin\theta = \frac{dy}{ds}$$

إن ψ_θ صغيرة جداً جداً وبالتالي $PQ \approx PS = ds$

(بفرض أن المثلث PSQ متساوي الساقين زاويتيه المتساويتين 90^o).

إن الطول SQ'' هو مقدار تمدد العنصر الخطي PQ

وبالتالي فإن تمدد الواحدة أو الإنفعال الناظمي يصبح:

$$\epsilon_\theta = \frac{Change\ in\ the\ length}{Original\ length} \approx \frac{SQ''}{PQ}$$

$$= \frac{QR''\cos\theta + R''Q''\sin\theta}{ds}$$

$$= \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\times dx + \frac{\partial u}{\partial y}\times dy\right)\cos\theta + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\times dx + \frac{\partial v}{\partial y}\times dy\right)\sin\theta}{ds}$$

مركبات الإنفعال في نقطة ما بالنسبة لأي إتجاه

$$\epsilon_\theta = \frac{\partial u}{\partial x} cos^2\theta + \frac{\partial v}{\partial y} sin^2\theta + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \sin\theta \cos\theta$$

$$\epsilon_\theta = \epsilon_x cos^2\theta + \epsilon_y sin^2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta$$

$$\epsilon_\theta = \left(\frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2}\right) + \left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right) \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta$$

هنا θ مقاسة من المحور x.

من أجل انفعال القص يجب أن نقيس التغير في زاوية عنصرين خطيين كانا على تعامد بينهما قبل التشوه. أي يجب أن نجد التغير في الزوايا: $\psi_\theta \ \& \ \psi_{\theta+\pi/2}$

$$\psi_\theta = \tan\psi_\theta = \frac{QS}{PQ} = \frac{R''Q''\cos\theta - QR''\sin\theta}{ds}$$
$$= \left(\frac{\partial v}{\partial x} \times \frac{dx}{ds} + \frac{\partial v}{\partial y} \times \frac{dy}{ds}\right)\cos\theta - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \times \frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y} \times \frac{dy}{ds}\right)\sin\theta$$
$$= \frac{(\epsilon_y - \epsilon_x)\sin 2\theta}{2} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \times cos^2\theta - \frac{\partial u}{\partial y} \times sin^2\theta\right)$$

مركبات الإنفعال في نقطة ما بالنسبة لأي إتجاه

- تبعاً لأن $\sin(\alpha+\pi/2)=\cos\alpha \quad \& \quad \cos(\alpha+\pi/2)=-\sin\alpha$ نستطيع كتابة:

$$\psi_{\theta+\pi/2}=-(\epsilon_y-\epsilon_x)\sin\theta\cos\theta+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\times sin^2\theta-\frac{\partial u}{\partial y}\times cos^2\theta\right)$$

- تعريفاً لدينا:

$$\gamma_\theta=\psi_\theta-\psi_{\theta+\pi/2}$$

$$\gamma_\theta=\frac{(\epsilon_y-\epsilon_x)\sin 2\theta}{2}+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\times cos^2\theta-\frac{\partial u}{\partial y}\times sin^2\theta\right)-\left(-(\epsilon_y-\epsilon_x)\sin\theta\cos\theta+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\times sin^2\theta-\frac{\partial u}{\partial y}\times cos^2\theta\right)\right)$$

فيكون: $\gamma_\theta=(\epsilon_y-\epsilon_x)\sin 2\theta+\gamma_{xy}\cos 2\theta$ حيث θ مقاسة من المحور x.

العلاقتين

$$\epsilon_\theta=\left(\frac{\epsilon_x+\epsilon_y}{2}\right)+\left(\frac{\epsilon_x-\epsilon_y}{2}\right)\cos 2\theta+\frac{\gamma_{xy}}{2}\sin 2\theta$$

$$\gamma_\theta=(\epsilon_y-\epsilon_x)\sin 2\theta+\gamma_{xy}\cos 2\theta$$

تعطيان الإنفعلات بالنسبة لأي اتجاه.

الإنفعالات الرئيسية واتجاهاتها

- إن الإتجاهات للإنفعالات الرئيسية المتعامدة تكون بحيث تصبح الإنفعالات القاصة عندها مساوية للصفر. أي $\gamma_\theta = 0$ من أجل إيجاد الإنفعالات الرئيسية المتعامدة:

$$\gamma_\theta = (\epsilon_y - \epsilon_x)\sin 2\theta + \gamma_{xy}\cos 2\theta = 0$$

أو $\tan 2\theta = \dfrac{\gamma_{xy}}{(\epsilon_y - \epsilon_x)}$ بتعويض قيم θ نحصل على: $\epsilon_{1,2} = \dfrac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \pm \dfrac{1}{2}\sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2}$

- أما جملة الإتجاهات التي تكون عندها قيم انفعال القص هي الأعظمية يمكن إيجادها بوضع: $\dfrac{d\gamma_\theta}{d\theta} = 0$

$$\frac{d}{d\theta}\left((\epsilon_y - \epsilon_x)\sin 2\theta + \gamma_{xy}\cos 2\theta\right) = 0$$

$$(\epsilon_y - \epsilon_x) \times 2\cos 2\theta - \gamma_{xy} \times 2\sin 2\theta = 0$$

$$\tan 2\theta = \frac{(\epsilon_y - \epsilon_x)}{\gamma_{xy}}$$

الإنفعالات الرئيسية واتجاهاتها

لا حظ بأنه:

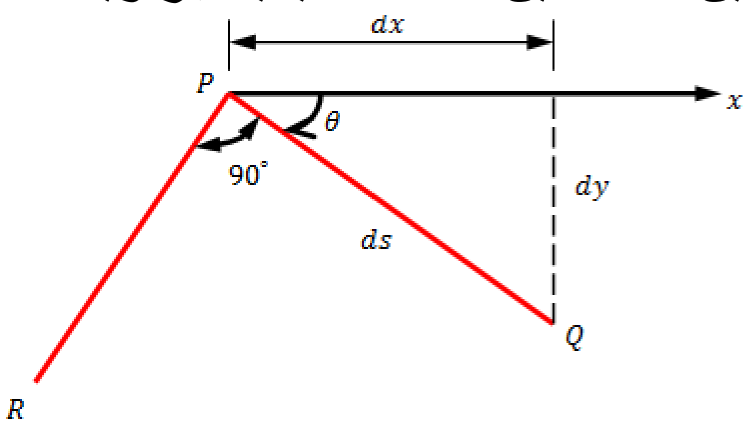
1. العلاقة $\tan 2\theta = \frac{(\epsilon_y - \epsilon_x)}{\gamma_{xy}}$ تعطي قيمتين لـ 2θ تختلفان بـ 180° و قيمتين لـ θ تختلفان بـ 90°.

   على سبيل المثال إذا كانت $\theta = \alpha$ فالقيمة الثانية ستكون $\theta = \alpha + \frac{\pi}{2}$.

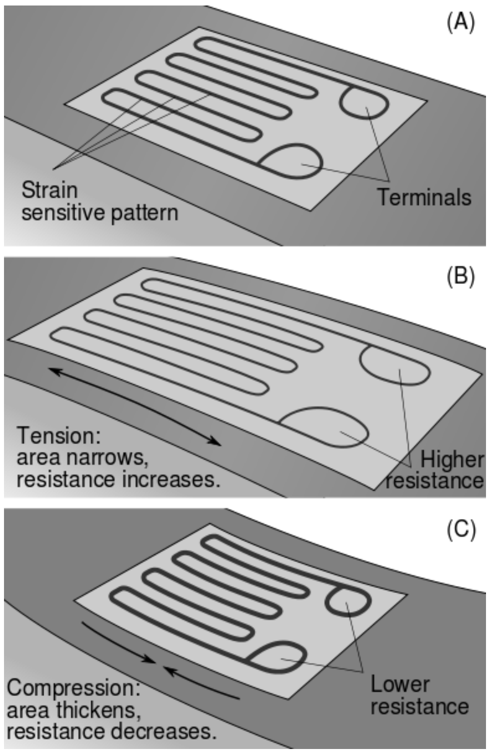
2. إنتبه إلى أنه عند الإشتقاق كانت θ مأخوذة مع عقارب الساعة وبالتالي يعتبر الإتجاه مع عقارب الساعة هو الإتجاه الموجب.

3. إن ϵ_θ هو الإنفعال الناظمي لعنصر خطي يميل بزاوية θ .

4. من أجل انفعال القص γ_θ يجب أن نعرف اتجاهين متعامدين. أحدهما يميل بزاوية θ والآخر يميل بـ $\theta + \frac{\pi}{2}$ كما هو موضح:



مقياس الانفعالات الكهربائي
Electric Strain Gauge



يعتبر الإنفعال هو الظاهرة الهندسية الأساسية , فغالباً ما يقاس عند نقطة من جسم متعرض لحالة إجهادية معينة. ثم يتم تقييم الإجهادات عند النقطة بضرب الإنفعال الذي تم قياسه بمعامل المرونة.

هذه مبدئياً هي الوسيلة الوحيدة لتحديد الإجهاد في نقطة لأن الإجهاد ليس ظاهرة أساسية مثل الإنفعال بل هو ناتج عنها. أي هو كمية مستنتجة.

في مقياس الإنفعال الكهربائي Electric Strain Gauge هناك دارة كهربائية تمرر تياراً. تتغير فولطية هذا التيار بتغير مقاومة هذه الدارة كما هو موضح بالشكل:

يعطى معامل المقياس Gauge Factor بـ $GF = \frac{\Delta R / R_G}{\epsilon}$

حيث ΔR مقدار التغير بالمقاومة الناتج عن الإنفعال.

و R_G المقاومة الأساسية للدارة قبل التشوه, وأخيراً ϵ هو مقدار الإنفعال.

واحدة القياس عادة (رغم أن الإنفعال لاواحدة له) تقدر عادة بـ الميكروإنفعال MicroStrain وهو جزء من 10^6 جزء من الإنفعال.

$$\epsilon_\theta = \left(\frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2}\right) + \left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)\cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin 2\theta$$

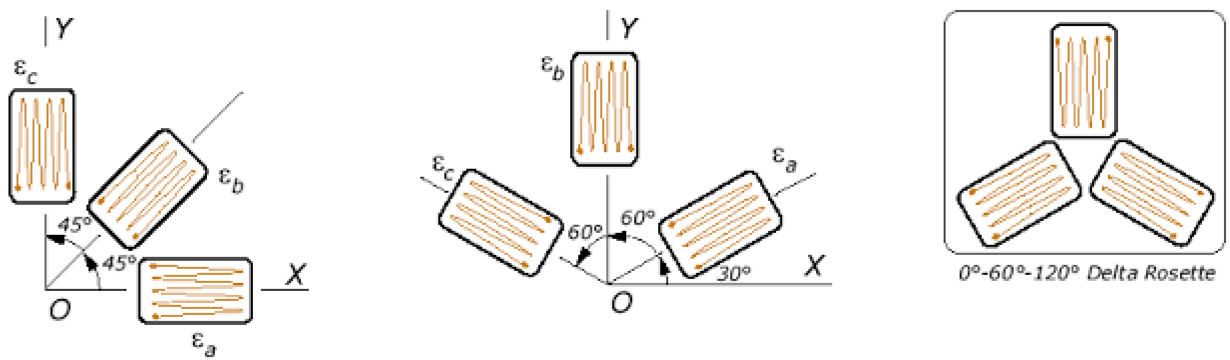
$$\gamma_\theta = (\epsilon_y - \epsilon_x)\sin 2\theta + \gamma_{xy}\cos 2\theta$$

زهرة الإنفعالات
Strain Rosette

ليس من الممكن قياس الإنفعالات القاصة من مقياس الإنفعالات الكهربائي مباشرة.

الإنفعالات الرئيسية وإنفعالات القص الأعظمية يمكن استنتاجها جميعاً في نقطة ما من جسم متشوه عن طريق قياس الإنفعالات الناظمية لثلاثة مقاييس كهربائية موزعة على اتجاهات معينة في نقطة.

توزع المقاييس يتم بشكل يشبه توزع أوراق زهرة لذلك تسمى بزهرة الإنفعالات. ولها التشكيلات الأكثر استخداماً التالية:



في الحالتين جميع المقاييس لها نفس الأطوال وتتوضع بالنسبة لبعضها بزوايا:

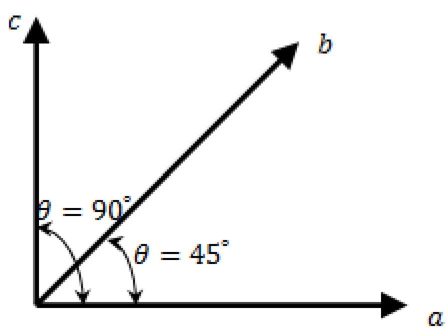
0° 45° 90° من أجل التوضع المستطيل rectangular strain rosette

و 0° 60° 120°من أجل التوضع المتساوي جانبياً equilateral strain rosette

وأيضاً بتوضعات 120° بين كل مقياس إنفعال Delta strain rosette

زهرة الإنفعالات Rectangular

- نحصل من مقاييس الإنفعالات بالإتجاهات a,b,c على المقادير: ϵ_a, ϵ_b *and* ϵ_c
- إذا جعلنا الاتجاه xينطبق على محور a نستطيع أن نكتب



الإنفعال في اتجاه يميل بزاوية θ مع المحور x بالعلاقة:

$$\epsilon_\theta = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin 2\theta$$

من أجل $\theta = 0^\circ$ يكون $\epsilon_a = \epsilon_x$

ومن أجل $\theta = 45^\circ$ يكون $\epsilon_b = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\gamma_{xy}}{2} = \frac{\epsilon_a + \epsilon_c}{2} + \frac{\gamma_{xy}}{2}$

أما من أجل $\theta = 90^\circ$ يكون $\epsilon_c = \epsilon_y$

وبالتالي نستطيع أن نعبر عن المقادير ϵ_x, ϵ_y *and* γ_{xy} كأنها مقادير تم قياسها تماماً

وتحديداً قيمها تؤخذ: $\epsilon_x = \epsilon_a$

$$\epsilon_y = \epsilon_c$$

$$\gamma_{xy} = 2\epsilon_b - \epsilon_a - \epsilon_c$$

وبتطبيق علاقات الإنفعالات الرئيسية واتجاهاتها يمكن معرفة قيمها وقيم الزوايات التي تحددها , مع إنفعالات القص الأعظمية واتجاهاتها أيضاً.

مثال 1 :

- كانت القراءات من زهرة الإنفعالات المستطيلة هي كالتالي:

$$\epsilon_0 = 3 \times 10^{-4}, \epsilon_{45} = -4 \times 10^{-4}, \epsilon_{90} = 5 \times 10^{-4}$$

- حدد الإنفعالات الرئيسية واتجاهاتها .

$$\epsilon_0 = \epsilon_a = 3 \times 10^{-4}$$
$$\epsilon_{45} = \epsilon_b = -4 \times 10^{-4}$$
$$\epsilon_{90} = \epsilon_c = 5 \times 10^{-4}$$
$$\gamma_{xy} = 2\epsilon_b - \epsilon_a - \epsilon_c$$
$$= 2\epsilon_{45} - \epsilon_0 - \epsilon_{90}$$
$$= -2 \times 4 \times 10^{-4} - 3 \times 10^{-4} - 5 \times 10^{-4} = -1.6 \times 10^{-3}$$

$$\epsilon_{1,2} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\epsilon_x - \epsilon_y\right)^2 + \gamma_{xy}^2}$$

$$\tan 2\theta = \frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y}$$

$$\therefore \theta_1 = 41.44^\circ, \theta_2 = 131.44^\circ$$

مثال 2 :

- معطى القياسات من زهرة إنفعالات مستطيلة, حدد الإنفعالات الرئيسية واتجاهاتها وأيضاً حدد الإجهادات الرئيسية.

$$\epsilon_0 = 2 \times 10^{-3}, \epsilon_{45} = 1.35 \times 10^{-3}, \epsilon_{90} = 3 \times 10^{-4}, \mu = 0.3, E = 2 \times 10^5 \frac{N}{mm^2}$$

$$\epsilon_1 = 2.023 \times 10^{-3}$$
$$\epsilon_2 = 2.77 \times 10^{-4}$$

$$\theta_1 = 6.61^\circ, \theta_2 = 96.61^\circ$$

$$\sigma_{max} = \frac{E}{1-\mu^2}\{\epsilon_1 + \mu\epsilon_2\} = 462.88\ N/mm^2$$

$$\sigma_{min} = \frac{E}{1-\mu^2}\{\epsilon_2 + \mu\epsilon_1\} = 194.26\ N/mm^2$$

مثال 3 :

- الإنفعالات المعطاة من مقاييس زهرة الإنفعالات هي كالتالي:

$$\epsilon_0 = 4 \times 10^{-4}, \epsilon_{45} = 3 \times 10^{-4}, \epsilon_{90} = 2 \times 10^{-4}$$

- أوجد الإنفعالات الرئيسية واتجاهاتها.

زهرة الإنفعالات دلتا
Delta Rosette

- بهذه الحالة إذا افترضنا أن محور x ينطبق على الإتجاه a لأحد مقاييس الإنفعال فإن المقياسين الآخرين سينطبقان على الزوايا $\theta=60^o$, $\theta=120^o$ وبالتالي يعطى الإنفعال الناظمي في أي اتجاه لـθ بالعلاقة:

$$\epsilon_\theta = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin 2\theta$$

- وبالتعويض بقيم θ المختلفة:

$$\epsilon_a = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}$$

$$\epsilon_b = \left(\frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2}\right) + \left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{\gamma_{xy}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\epsilon_c = \left(\frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2}\right) + \left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{\gamma_{xy}}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

- وبالحل من أجل قيم $\epsilon_x, \epsilon_y \;\&\; \gamma_{xy}$ نحصل على:

$$\epsilon_x = \epsilon_a$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2}{\sqrt{3}}(\epsilon_b - \epsilon_c)$$

$$\epsilon_y = \frac{2\epsilon_b + 2\epsilon_c - \epsilon_a}{3}$$

- يمكن استنباط علاقات مباشرة من أجل حساب الانفعالات الرئيسية.

مثال 4:

- بأخذ قياسات الإنفعال من زهرة الإنفعالات دلتا وجدنا:

$\epsilon_1 = -3 \times 10^{-4}, \epsilon_2 = 3 \times 10^{-4}, \epsilon_3 = 6 \times 10^{-4}$

- حدد الانفعالات الرئيسية واتجاهاتها. بفرض نسبة بواسون تساوي 0.3 ومعامل المرونة يساوي 210Gpa احسب الإجهادات الرئيسية وإجهاد القص الأعظمي.

$$\epsilon_{1,2} = \frac{\epsilon_a + \epsilon_b + \epsilon_c}{3} \pm \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\epsilon_a - \epsilon_b)^2 + (\epsilon_b - \epsilon_c)^2 + (\epsilon_c - \epsilon_a)^2}$$

$$\epsilon_1 = 7.287 \times 10^{-4}$$
$$\epsilon_2 = -3.287 \times 10^{-4}$$

$$\tan 2\theta = \frac{\epsilon_y - \epsilon_x}{\gamma_{xy}} \qquad \therefore \theta_1 = 9.923^{\circ}, \theta_2 = 99.92^{\circ}$$

$$\sigma_{max} = \frac{E}{1-\mu^2}\{\epsilon_1 + \mu\epsilon_2\} = 145.4\ MN/m^2 \qquad \sigma_{min} = \frac{E}{1-\mu^2}\{\epsilon_2 + \mu\epsilon_1\} = -25.4\ MN/m^2$$

$$\tau_{max} = E\frac{\gamma_{xy}}{2(1+\mu)} = -27.98\ MN/m^2$$

دائرة مور للانفعالات:

لدينا ثلاثة انفعلات ناظمية باتجاهات a,b,c

ومقاديرها هي $\epsilon_a, \epsilon_b \,\&\, \epsilon_c$ وليكن الإتجاه b مرجعياً

بالنسبة لنا (x-axis) .

الاتجاهين الباقيين يميلان بزوايا α & β عليه.

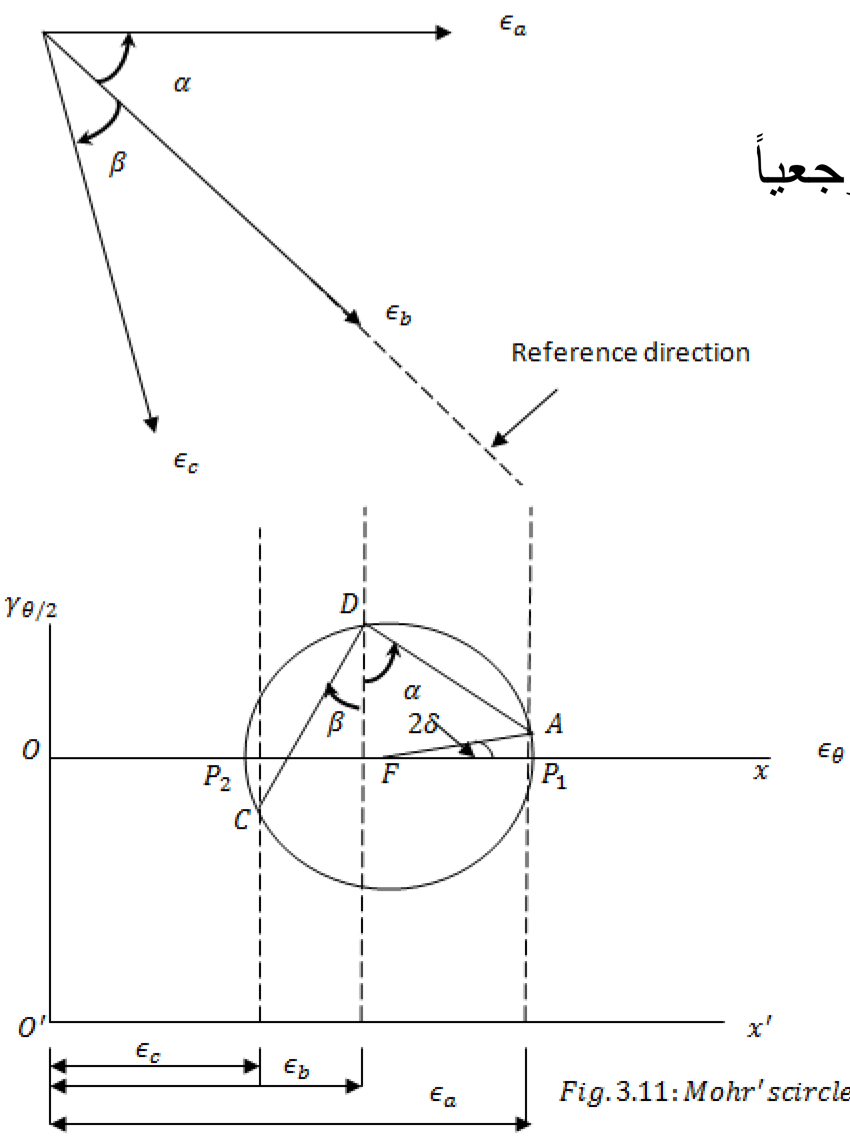


Fig. 3.11: Mohr's circle of strain

مثال 5:

- أثبت أن اتجاهي عنصرين متعامدين يتعرضان لدوران نسبي أعظمي و أصغري يعطى بـ:

$$\tan 2\theta = \frac{\left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)}$$

$$\gamma_\theta = (\epsilon_y - \epsilon_x)\sin 2\theta + \gamma_{xy}\cos 2\theta$$

$$\frac{\partial \gamma_\theta}{\partial \theta} = 0 \qquad \frac{\partial}{\partial \theta}\left((\epsilon_y - \epsilon_x)\sin 2\theta + \gamma_{xy}\cos 2\theta\right) = 0$$

$$(\epsilon_y - \epsilon_x) \times 2\cos 2\theta - \gamma_{xy} \times 2\sin 2\theta = 0$$

$$\tan 2\theta = \frac{(\epsilon_y - \epsilon_x)}{\gamma_{xy}}$$

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \;\; ; \;\; \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \;\; \& \; \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

مثال 6:

- باستخدام معادلات التوازن و العلاقة بين الإجهادات والإنفعالات في الحالة ثنائية البعد وعلاقات الإنفعالات – الإنتقالات , برهن أنه في حالة غياب القوى الجسمية يكون:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{1-\mu} \times \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0$$

علاقات الإنفعلات الإنتقلات 2-D

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$
$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$
$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

العلاقات بين الإجهادات والإنفعالات

$$\epsilon_x = \frac{1}{E}\{\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)\}$$
$$\epsilon_y = \frac{1}{E}\{\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)\}$$
$$\epsilon_z = \frac{1}{E}\{\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)\}$$
$$\sigma_z = 0 \ \ and\ also\ \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$$

معادلات التو ازن 2-D

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0$$
$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0$$

$$\epsilon_x + \mu\epsilon_y = \frac{1}{E} \times \sigma_x(1-\mu^2)$$

$$\epsilon_x = \frac{1}{E}\{\sigma_x - \mu(\sigma_y)\}$$
$$\epsilon_y = \frac{1}{E}\{\sigma_y - \mu(\sigma_x)\}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad where, G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2} \times (\epsilon_x + \mu\epsilon_y) \qquad \sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2} \times (\epsilon_y + \mu\epsilon_x)$$

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$
$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$
$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2} \times (\epsilon_x + \mu\epsilon_y) \qquad \sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2} \times (\epsilon_y + \mu\epsilon_x)$$

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2} \times \left\{\frac{\partial u}{\partial x} + \mu\frac{\partial v}{\partial y}\right\}$$
$$\sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2} \times \left\{\frac{\partial v}{\partial y} + \mu\frac{\partial u}{\partial x}\right\}$$
$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)} \times \left\{\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right\}$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \frac{E}{1-\mu^2} \times \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right)$$
$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = \frac{E}{2(1+\mu)} \times \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$\frac{E}{1-\mu^2} \times \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right) + \frac{E}{2(1+\mu)} \times \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0$$

نضرب الحدود بـ: $\frac{2(1-\mu^2)}{E}$

$$2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right) + (1-\mu)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0$$

نضيف ونطرح: $\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1-\mu)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\mu\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + (1-\mu)\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1-\mu)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\mu\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + (1-\mu)\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1-\mu)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\mu\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \mu\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)(1-\mu) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \mu\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{1-\mu} \times \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0$$